



Übungen zur Variationsrechnung — Blatt 2

Sommersemester 2000

AUSGABE AM FR 5.5.2000

BESPRECHUNG: SCHAU MER MAL, WANN PASST

6. Fundamentallemma der Variationsrechnung

Sei $f \in C^0([t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n)$. Falls für alle $\varphi \in C_{\text{kp}}^\infty(]t_0, t_1[\rightarrow \mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle f(t); \varphi(t) \rangle dt = 0,$$

dann ist $f \equiv 0$.

— MACHEN WIR SOFORT AUS DEM STAND HERAUS

7. Erdmannsche Eckenbedingung

Sei $L \in C^1(]t_0, t_1[\times \mathcal{G} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$ mit $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei y^* stückweise C^1 mit einer (möglichen) Ecke bei $\hat{t} \in]t_0, t_1[$. Wenn ein solches y^* (schwaches) Minimum des Variationsproblems

$$I[y] := \int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t), \dot{y}(t)) dt, \quad y(t_0) = y_0, \quad y(t_1) = y_1$$

ist, dann gilt für $t \neq \hat{t}$ die übliche Eulergleichung (warum?). Man zeige, daß in $t = \hat{t}$ die Eckenbedingung $p^*(t-) = p^*(t+)$ gilt, wobei

$$p(t) := L_{\dot{y}}(t, y(t), \dot{y}(t))$$

definiert ist. D.h., selbst wenn y^* in \hat{t} einen Sprung haben könnte, so muß dort doch p^* stetig sein. — BESPRECHUNG AB MI 10.5.2000

8. Das Auftreten von Ecken

Man beschreibe die Gesamtheit der Lösungen des Variationsproblems

$$\min \left\{ \int_0^3 \dot{y}^2(t)(1 - \dot{y}(t))^2 dt \mid y \text{ stückweise } C^1, y(0) = 0, y(3) = 1 \right\}$$

prüfe, daß für diese die Erdmannsche Eckenbedingung erfüllt ist, daß aber $y(t) = t/3$ die einzige C^1 -Lösung (ohne Ecken) der Eulergleichung auf ganz $[0, 3]$ mit den gegebenen Randbedingungen ist. — BESPRECHUNG AB MI 10.5.2000

9. Natürliche Randbedingungen

Sei L wie in Aufgabe 7 und $y^* \in C^1([t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n)$ sei ein (schwaches) Minimum für $I[y] := \int_{t_0}^{t_1} L(t, y, \dot{y}) dt$ ohne vorgegebene Randbedingungen. Man zeige, daß dann zusätzlich zu den Eulerschen Gleichungen die sog. *natürlichen* Randbedingungen $p^*(t_0) = p^*(t_1) = 0$ erfüllt sind. — BESPRECHUNG AM FR 12.5.2000