TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
Priv.Doz. Dr. Jochen Denzler

Übungen zur Variationsrechnung — Blatt 5

Sommersemester 2000

AUSGABE AM MI., 7.6.2000
BESPRECHUNG: AB MI., 14.6.2000

18. Etwas reelle Analysis und Funktionalanalysis zum Warmlaufen

(a) Sei (q_n) eine beliebige Folge in $[0,1]$, und sei $f(x) := |x|^{-1/2}$. Man zeige, daß g, gegeben durch $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(x-q_n)$ eine Lebesgue–integrierbare Funktion ist und gebe Zahlen $0 < a < b$ an, so daß $a < \int_0^1 g(x)\,dx < b$ ist. Wie könnte man (q_n) wählen, damit g auf keinem Intervall beschränkt ist?

(b) Skizzieren Sie die im Skript gegebenen Gegenbeispiele zum Lemma von Fatou.

(c) Man zeige, daß die Folge (f_n) in $C^0[-1,1]$, gegeben durch $f_n(x) := x^{1/(2n+1)}$, bezüglich der L^1-Norm eine Cauchy–Folge ist. Ferne zeige man, daß sie in $L^1[-1,1]$ gegen die Signum–Funktion konvergiert.

(d) In L^p $(p > 1)$ konvergiere $f_n \rightharpoonup f$ schwach, ferner $f_n \to g$ fü. Man zeige, daß $f = g$ fü. Dabei dürfen alle im Schema "Vergleich der Konvergenzbegriffe" ohne Beweis gegebenen Implikationen verwendet werden.

— BESPRECHUNG (A,B,C) AM MI., 14.6.; (D) AB 16.6.

19. Außer Konkurrenz, in erster Linie rein mathematisch interessant

Dieses Beispiel hat nichts mit Variationsrechnung zu tun, sondern erfüllt allein den Zweck, zu illustrieren, daß beim Vergleich unterschiedlicher Konvergenzbegriffe sehr wohl ein und dieselbe Folge bezüglich unterschiedlicher Konvergenzbegriffe *verschiedene* Grenzwerte haben kann, daß also Teil (d) der vorigen Aufgabe eine ernstzunehmende Frage beantwortet.

Für $x \in \mathbb{Q}$ ist $|x|$ der übliche Betrag; daneben sei $x = \pm p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ $(\alpha_j \in \mathbb{Z})$ die Primzahlzerlegung von x. Für irgendeine vorgegebene Primzahl p sei $|x|_p := p^{-\alpha}$, der Kehrwert des p-Anteils der Primfaktorzerlegung von x. Ferner ist $|0|_p := 0$. Beispiele: $|12/17|_2 = |2^2 3^1 17^{-1}|_2 = 2^{-2} = 1/4$; $|-5/7|_2 = 1$; $|1/24|_2 = 8$.

$d_p(x,y) := |x-y|_p$ ist eine Metrik auf $\mathbb{Q}$.

Wenn $|n_j/m_j - \ln 3/\ln 2| \le 1/m_j^2$ für Folgen $n_j, m_j \to \infty$ (und es gibt Folgen mit dieser Eigenschaft!), dann gilt für $q_j := 2^{n_j}/3^{m_j}$ $\quad q_n \to 1$ im Sinne von $|\cdot|$, aber $q_j \to 0$ im Sinne von $|\cdot|_2$.
— BESPRECHUNG FÜR INTERESSENTEN IN MEINER SPRECHSTUNDE

b.w.

20. Unterhalbstetigkeit der Norm bzgl. schwacher Konvergenz

(a) Man zeige, daß in $L^2(\Omega \to \mathbb{R})$ durch $\langle f, g\rangle := \int_\Omega fg$ ein Skalarprodunkt definiert ist.

(b) Man zeige, daß für $f_n \rightharpoonup f$ gilt: $\liminf \|f_n\|_{L^2} \geq \|f\|_{L^2}$. (*Hinweis: Ein Zweizeiler beginnend mit* $\langle f_n - f, f_n - f\rangle$).

(c) Man zeige $f_n \rightharpoonup f \wedge \|f_n\|_{L^2} \to \|f\|_{L^2} \Longrightarrow f_n \to f$ (L^2-Konvergenz).

— <u>BESPRECHUNG AB MI., 14.6.2000</u>

21. Schwach differenzierbar, aber unstetig

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei die Kreisscheibe vom Radius $\frac{1}{2}$ um 0. Man zeige, daß die Funktion $f(x) := \ln\Big|\ln|x|\Big|$ in $W^{1,2}(\Omega)$ liegt, obwohl sie eine Singularität bei 0 hat.

Man konstruiere daraus eine $W^{1,2}(\Omega)$–Funktion, die auf keiner offenen Teilmenge von Ω beschränkt ist. (*Hinweis: Aufg. 18*)

— <u>BESPRECHUNG AB FR., 16.6.2000</u>

22. Schwache Konvergenz und Nichtlinearität beißen sich

(a) Man zeige: Falls für $f_n, f \in L^2[0, 2\pi]$ gilt: $\|f_n\|_{L^2}$ beschränkt und $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$ für alle Intervalle $[a, b] \subset [0, 2\pi]$, dann konvergiert f_n schwach gegen f, dh. dann gilt $\int_a^b f_n\varphi \to \int_a^b f\varphi$ für alle $\varphi \in L^2[0, 2\pi]$.

(b) Man folgere für eine T-periodische Funktion $g \in C^0(\mathbb{R})$: Die Folge $(g_n) \subset L^2[0, 2\pi]$, gegeben durch $g_n(x) := g(nx)$ konvergiert schwach gegen $\langle g\rangle$, die konstante Funktion, deren Wert der Mittelwert $\langle g\rangle := T^{-1} \int_0^T g(x)\,dx$ ist.

(c) Sei $f_n(x) := 2 + \sin nx$. Dann konvergieren schwach in $L^2[0, 2\pi]$:
$f_n \rightharpoonup f \equiv 2, \quad 1/f_n \rightharpoonup g \equiv 1/\sqrt{3}, \quad$ aber $g \neq 1/f$.

— <u>BESPRECHUNG AB FR., 16.6.2000</u>