Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Priv.Doz. Dr. Jochen Denzler

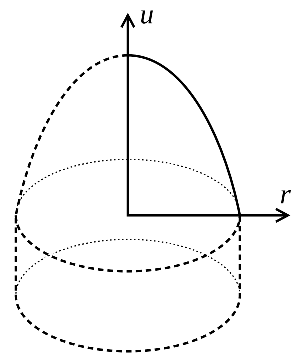
Übungen zur Variationsrechnung — Blatt 4

Sommersemester 2000

Ausgabe am Mi., 24.5.2000
Besprechung: ab 31.5.2000

14. Das Newtonsche Widerstandsproblem: ein Querschläger in der allgemeinen Theorie

Für das Problem, bei gegebener kreisrunder Querschnittsfläche vom Radius R die geometrische Gestalt eines Projektils zu finden, das den geringsten Luftwiderstand hat, hat Newton folgendes Modell vorgeschlagen:



$$I[u] := \int_0^R \frac{r\,dr}{1+u'(r)^2}\ . \tag{1}$$

Dabei ist der Graph von $r \mapsto u(r)$ die Mantellinie des Profils. Als Annahmen gehen dabei ein: Wir bestehen auf einem rotationssymmetrischen Profil (es wurde vor einiger Zeit bewiesen, daß das Optimum ohne diese Voraussetzung *nicht* automatisch rotationssymmetrisch wird).

Physikalische Modellannahme bei der Herleitung von (1): der Widerstand entsteht durch den Impulsübertrag durch einzelne Gasatome, die jeweils genau einmal das Projektil stoßen, soweit sie sich über der Querschnittsfläche befinden.

Man zeige unter Verwendung sehr länglicher Projektile, daß das Infimum von I ohne weitere Bedingungen 0 ist. Man zeige, daß auch unter der Einschränkung $u \le M$ das Infimum noch 0 wird, kritisiere dieses mathematische Resultat aber zugleich mit Blick auf die physikalische Modellannahme, die der Formel zugrundegelegt ist.

Wir betrachten jetzt das Problem $\min I$ unter den Nebenbedingungen $u'(r) \le 0$ und $u \le M$, $u(0) = M$, $u(R) = 0$. Man kann zeigen, daß das Minimum existiert und für eine Funktion u angenommen wird, die auf einem Intervall $[0, a]$ konstant gleich M ist und dann eine Ecke (Sprung in der ersten Ableitung) hat.

Man leite die Euler-Gleichung her, zeige, daß die erwähnte Lösung *nicht* der Erdmannschen Eckenbedingung genügt, und man erkläre, warum das nicht im Widerspruch zur Theorie der Vorlesung steht.

Man teste die Legendre–Bedingung, zeige, daß diese auf dem Konstanzintervall ebenfalls verletzt ist, ziehe aber eine Folgerung für das Verhalten der Kurve in dem Bereich, wo diese nicht konstant ist.

— Besprechung am Mi., 31.5.2000

15. Die Kettenlinie

Man transformiere das Problem der Kettenlinie: statt eines Problems für eine Kurve $y = y(x)$ in kartesischen Koordinaten mit gegebener Länge als Nebenbedingung soll jetzt y als Funktion der Bogenlänge ausgedrückt werden. Wie lautet dann die Nebenbedingung, wie die Euler-Gleichung? Welches Vorzeichen hat der Langrangeparameter?

Man verwende ein Konvexitätsargument, wie am Beispiel der Brachystochrone in der Vorlesung gezeigt, um zu zeigen, daß die eindeutige Lösung des Randwertproblems für die Euler–Gleichung tatsächlich das absolute Minimum des Variationsproblems ist.
— <u>Besprechung ab Mi 31.5.2000</u>

16. Das Keplerproblem

Ein Masseteilchen (Masse m) im Gravitationspotential einer schweren Punktmasse wird durch das Lagrangesche Variationsproblem

$$I[r, \phi] := \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{mG}{r} \right\} dt$$

beschrieben. Man leite die Eulergleichungen her, ferner den Energiesatz. Aus einer der Gleichungen und dem Umstand, daß ϕ nicht explizit im Integranden vorkommt, folgt die Konstanz einer Größe. Welche? (In Formeln und physikalischer Name)
— <u>Besprechung am Fr 2.6.2000</u>

17. Das Eigenwertproblem des Laplace-Operators

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand. Unter der Annahme, daß das Variationsproblem

$$\min \left\{ I[u] := \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx \;\middle|\; u \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \,,\; u|_{\partial\Omega} = 0 \,,\; \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx = 1 \right\} \tag{2}$$

eine Lösung u_1 hat, und unter der weiteren Annahme, daß diese sogar in $C^2(\Omega)$ zu liegen geruht, zeige man, daß sie die Gleichung $-\Delta u_1 = \lambda_1 u_1$ für geeignetes $\lambda_1 > 0$ löst. Welche Modifikationen zu den in der Vorlesung betrachteten Fällen sind nötig, um dieses Beispiel einzuschließen?

Wenn wir jetzt das Variationsproblem (2) auf Funktionen u einschränken, die zu einer (der) soeben unterstellten Lösung u_1 orthogonal sind, dh. $\int_\Omega u u_1 = 0$, und in dieser eingeschränkten Klasse wieder die Existenz eines Minimums u_2 und seine Glattheit annehmen, welche Gleichung erfüllt dann u_2?

Kramen Sie dann mal in Ihrem Analysis–Gedächtnis zum Thema symmetrische Matrizen (incl. Beweise der seinerzeitigen Aussagen). Analogien?
— <u>Besprechung ab Fr 2.6.2000</u>