



## Übungen zur Variationsrechnung — Blatt 2

Sommersemester 2000

AUSGABE AM FR 5.5.2000

BESPRECHUNG: SCHAU MER MAL, WANN PASST

### 6. Fundamentallemma der Variationsrechnung

Sei  $f \in C^0([t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n)$ . Falls für alle  $\varphi \in C_{\text{kp}}^\infty([t_0, t_1[ \rightarrow \mathbb{R}^n)$  gilt:

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle f(t); \varphi(t) \rangle dt = 0,$$

dann ist  $f \equiv 0$ .

— MACHEN WIR SOFORT AUS DEM STAND HERAUS

### 7. Erdmannsche Eckenbedingung

Sei  $L \in C^1(]t_0, t_1[ \times \mathcal{G} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$  mit  $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$  offen. Sei  $y^*$  stückweise  $C^1$  mit einer (möglichen) Ecke bei  $\hat{t} \in ]t_0, t_1[$ . Wenn ein solches  $y^*$  (schwaches) Minimum des Variationsproblems

$$I[y] := \int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t), \dot{y}(t)) dt, \quad y(t_0) = y_0, \quad y(t_1) = y_1$$

ist, dann gilt für  $t \neq \hat{t}$  die übliche Eulergleichung (warum?). Man zeige, daß in  $t = \hat{t}$  die Eckenbedingung  $p^*(t-) = p^*(t+)$  gilt, wobei

$$p(t) := L_{\dot{y}}(t, y(t), \dot{y}(t))$$

definiert ist. D.h., selbst wenn  $y^*$  in  $\hat{t}$  einen Sprung haben könnte, so muß dort doch  $p^*$  stetig sein. — BESPRECHUNG AB MI 10.5.2000

### 8. Das Auftreten von Ecken

Man beschreibe die Gesamtheit der Lösungen des Variationsproblems

$$\min \left\{ \int_0^3 \dot{y}^2(t)(1 - \dot{y}(t))^2 dt \mid y \text{ stückweise } C^1, y(0) = 0, y(3) = 1 \right\}$$

prüfe, daß für diese die Erdmannsche Eckenbedingung erfüllt ist, daß aber  $y(t) = t/3$  die einzige  $C^1$ -Lösung (ohne Ecken) der Eulergleichung auf ganz  $[0, 3]$  mit den gegebenen Randbedingungen ist. — BESPRECHUNG AB MI 10.5.2000

### 9. Natürliche Randbedingungen

Sei  $L$  wie in Aufgabe 7 und  $y^* \in C^1([t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n)$  sei ein (schwaches) Minimum für  $I[y] := \int_{t_0}^{t_1} L(t, y, \dot{y}) dt$  ohne vorgegebene Randbedingungen. Man zeige, daß dann zusätzlich zu den Eulerschen Gleichungen die sog. *natürlichen* Randbedingungen  $p^*(t_0) = p^*(t_1) = 0$  erfüllt sind. — BESPRECHUNG AM FR 12.5.2000