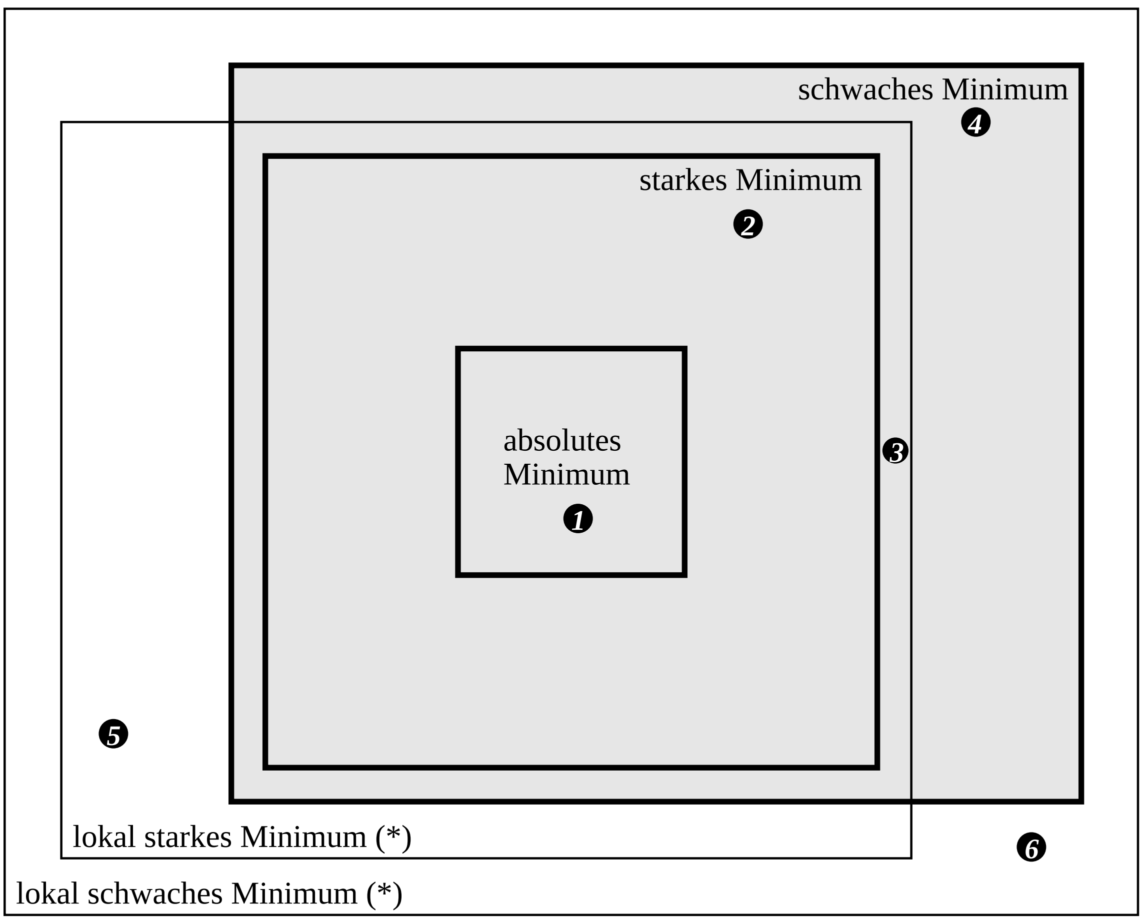
Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Priv.Doz. Dr. Jochen Denzler

Zur Vorlesung Variationsrechnung

Sommersemester 2000

Vergleich verschiedener Minimalitätsbegriffe in der Variationsrechnung



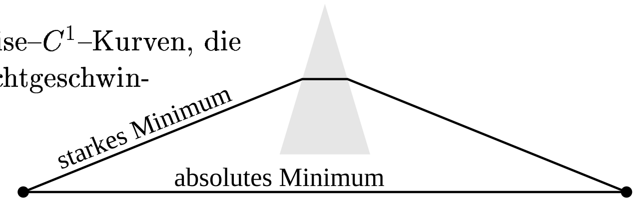
(*) Als *lokal* starke bzw. schwache Minima sind solche Extremalen bezeichnet, von denen nur jedes hinreichend kurze Segment eine starke bzw. schwache Minimale ist; dh., die Minimaleigenschaft ist nur im Kleinen erfüllt. (Die Bezeichnungen „lokal stark“ bzw. „lokal schwach“ sind nicht kanonisch.)

Solche Extremalen sind im funktionalanalytischen Sinn überhaupt keine relativen Minima, sondern Sattelpunkte! Nur der graue Bereich enthält echte Minima.

Beispiele

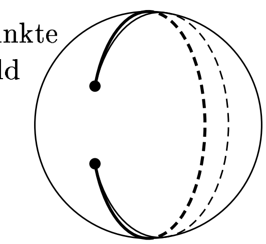
❶ Längenfunktional, definiert auf allen C^1–Kurven, die zwei gegebene Punkte verbinden: Die Strecke liefert das absolute Minimum.

❷ Lichtlaufzeit, definiert auf allen stückweise–C^1–Kurven, die zwei gegebene Punkte verbinden: die Lichtgeschwindigkeit in Glas ist geringer als in Luft, daher die Brechung durch das Prisma. Der gebrochene Weg ist starkes Minimum, aber nicht das absolute.



❹ $I[y] := \int_{-1}^{1} (\dot y^2 - \dot y^4)\,dt$, definiert für $y \in C^1[-1,1]$ mit $y(-1) = y(1) = 0$: $y^* \equiv 0$ ist schwaches Minimum, da für $|\dot y| < \varepsilon$ gilt: $\dot y^2 - \dot y^4 \geq (1-\varepsilon^2)\dot y^2$. Aber selbst kurze Segmente von $y^* \equiv 0$ sind nicht stark minimal, da für $\tilde y(t) := \varepsilon \sin^2 n(t-t_0)$ auf $[t_0, t_0 + \pi/n]$ mit $\tilde y = 0$ sonst gilt: $I[\tilde y] = \frac{1}{8}\pi\varepsilon^2 n(4 - 3\varepsilon^2 n^2) < 0$ für n groß.

❺ Längenfunktional, definiert auf allen C^1–Kurven, die zwei gegebene Punkte *auf der Kugeloberfläche* verbinden: der Großkreis „hintenherum“ im Bild ist nicht einmal ein schwaches Minimum, ein benachbarter Kleinkreis ist eine C^1–nahe Abkürzung. Dennoch sind hinreichend kurze Stücke des Großkreises (so kurz, daß sie keine Antipoden enthalten) sogar die absolut kürzesten Verbindungen zwischen ihren Endpunkten.



❻ Wähle das Funktional $\int_0^\pi (\dot y^2 - \dot y^4 - 2y^2)\,dt$ auf $C_0^1[0,\pi]$. $y \equiv 0$ ist zwar kritischer Punkt, aber nicht einmal ein schwaches Minimum. Denn für $\tilde y(t) = \varepsilon \sin t$ ist $I[\tilde y] = -\frac{1}{8}\pi\varepsilon^2(4 + 3\varepsilon^2)$. Auf kurzen Segmenten ist es aber doch ein schwaches Minimum, nicht jedoch ein starkes, aus demselben Grund wie in Fall ❹. Für die schwache Minimumseigenschaft müssen die Segmente $[t_0, t_1] \subset [0,\pi]$ so kurz sein, daß darauf stets $\int_{t_0}^{t_1} \dot y^2\,dt > 2\int_{t_0}^{t_1} y^2\,dt$ gilt, und das geschieht bei $(t_1 - t_0)^2 < \pi^2/2$.

❸ Dies ist ein Kuriosum, für das ich nur ein gekünsteltes Beispiel gefunden habe. Eine schwache Minimale, bei der sich das Funktional zwar durch starke Oszillationen verkleinern läßt, aber nur dann, wenn man erlaubt, daß diese Oszillationen auf langen Stücken auftreten. Hier habe ich ein Beispiel mit vektorwertigem $y = (y_1, y_2)$, wobei obendrein das Funktional kompliziertere Gestalt hat:

$$I[y_1, y_2] := \int_0^\pi \left(\dot y_1^2 - \frac{1}{2}\dot y_1^2\right)\,dt + \left(\int_0^\pi (\dot y_1^2 - 2y_1^2)\,dt\right)\left(\int_0^\pi \dot y_2^2\,dt\right)$$

auf $C_0^1([0,\pi] \to \mathbb{R}^2)$. Es folgt $I[y_1,y_2] \geq \left(\frac{1}{2} - \int \dot y_2^2\right)\left(\int \dot y_1^2\right)$, weil für $C_0^1[0,\pi]$–Funktionen $\int \dot y^2 \geq \int y^2$ gilt; also ist $(y_1, y_2) \equiv (0,0)$ ein schwaches Minimum.

Es ist kein starkes Minimum, denn für $\tilde y_1(t) = \varepsilon \sin t$, $\tilde y_2 = \varepsilon \sin nt$ ist $4I[\tilde y_1, \tilde y_2] = \varepsilon^2\pi - n^2\varepsilon^4 n^2$, und das ist für große n negativ.

Wenn wir uns allerdings auf kurze Segmente $[t_0, t_1]$ einschränken, dann wird auch der Term $\int_{t_0}^{t_1} (\dot y_1^2 - 2y_1^2)\,dt \geq 0$, und Oszillationen in $\int \dot y_2^2$ können uns nichts mehr anhaben.