TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
Priv.Doz. Dr. Jochen Denzler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zur Vorlesung Variationsrechnung

Sommersemester 2000

Fakten zu Lebesgue–Integral und Funktionenräumen

Es geht hier darum, einen allgemeineren Integralbegriff als das Riemann–Integral oder das Regel–Integral (welches von beiden auch immer in der Grundvorlesung behandelt wurde) einzuführen, das Lebesgue–Integral. Dafür werde ich das zu konstruierende Lebesgue–Integral mit $\int$ bezeichen, das aus der Grundvorlesung bekannte Integral hingegen zur Unterscheidung mit $\mathrm{R}\!\!\!\!\int$. Alle betrachteten Mengen seien Teilmengen der $\mathbb{R}^n$, alle betrachteten Funktionen gehen von solchen Teilmengen nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^m$.

Da es verschiedene Zugänge gibt, dient Text, der in der hier gegebenen Schrifttype gesetzt ist, denen, die schon etwas übers Lebesgue–Integral wissen, dazu, den hier gewählten Zugang in Kontext mit Bekanntem zu bringen. Neulinge sollten ihn daher ignorieren.

Definitionen vorab

Nullmengen: *Eine Teilmenge N des $\mathbb{R}^n$ heißt (Lebesgue–)Nullmenge, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine abzählbare Folge von (achsenparallelen) Quadern Q_j gibt, so daß $\bigcup_j Q_j \supset N$ und $\sum_j \mu(Q_j) < \varepsilon$. Dabei ist $\mu(Q_j)$ das aus der Schule bekannte Volumen des Quaders Q_j. Zum Beispiel ist die übliche durch Drittelung entstehende Cantormenge eine Nullmenge im $\mathbb{R}^1$, ferner ist jede abzählbare Menge eine Nullmenge.*

charakteristische Funktionen: *Für eine Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist χ_Ω definiert als die Funktion, die für $x \in \Omega$ den Wert $\chi_\Omega(x) = 1$ annimmt, ansonsten den Wert 0.*

fast überall: *Eine Eigenschaft gilt fast überall (fü.), wenn die Menge der Punkte, in denen sie* nicht *gilt, eine Nullmenge ist. Beispiele: $f = g$ fü. heißt für Funktionen f, g: Es gibt eine Nullmenge N, so daß $f(x) = g(x)$ für alle $x \notin N$. $f_n \to f$ fü. heißt für eine Funktionenfolge f_n, daß es eine Nullmenge N gibt, so daß $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \notin N$.*

meßbare Funktionen und Mengen: *Eine Funktion f heißt meßbar, wenn es eine Folge stetiger Funktionen f_n gibt, so daß $f_n \to f$ fü. Eine Menge heißt (Lebesgue–)meßbar, wenn ihre charakteristische Funktion meßbar ist.*

❓ „Komische Definition, ich hab gelernt, meßbare Mengen sind solche aus einer gegebenen σ–Algebra, und meßbare Funktionen sind solche, für die das Urbild offener [❓ Zwischenruf: nein, meßbarer!] Mengen meßbar ist. . . “
— ❗ Ja, die hier gegebene ist ein Spezialfall der allgemeinen axiomatischen Definition. Unter vielen möglichen Maßen interessiert uns hier nur das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$. Wie auch immer in Ihrer Vorlesung das Lebesgue–Maß konstruiert wurde: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann meßbar im hier gegebenen Sinne, wenn für sie Urbilder offener Mengen Lebesgue–meßbar sind. Gleichbedeutend: Urbilder von Borel–Mengen sind Lebesgue–meßbar. Das paßt in die Definition des Zwischrufers, wenn man unterschiedliche σ–Algebren in Definitions– und Wertebereich verwendet! NICHT gleichbedeutend: Urbilder von Lebesgue–meßbaren Mengen sind Lebesgue–meßbar. Eine solche Definition ist für die Analysis unbrauchbar, da es dann stetige Funktionen gäbe, die als nicht meßbar definiert wären: $f(x) := \frac{1}{2}(x + \mathrm{devilstaircase}(x))$ ist ein Homöomorphismus, der nichtborelsche Nullmengen in nicht Lebesgue–meßbare Mengen abbildet.

Eigenschaften meßbarer Funktionen

(Meßbar meint hier immer Lebesgue–meßbar.) Alle abgeschlossenen und alle offenen Mengen sind meßbar. Abzählbare Vereinigungen und Durchschnitte sowie Komplementärmengen meßbarer Mengen sind meßbar. Nullmengen sind meßbar.

Stetige Funktionen sind meßbar. Einsetzen meßbarer Funktionen f_i in eine stetige Funktion g liefert wieder eine meßbare Funktion $x \mapsto g(f_1(x), \dots f_k(x))$; insbesondere sind Summen und Produkte meßbarer Funktionen meßbar. (Umgekehrt kann das Einsetzen stetiger Funktionen in meßbare etwas nicht meßbares liefern, aber man kommt kaum je in die Versuchung, so etwas zu tun. Das Einsetzen von C^1–Funktionen in meßbare liefert aber wieder meßbare Funktionen.) Punktweise (fü.) Grenzwerte meßbarer Funktionen sind wieder meßbar.

Faustregel: nicht meßbare Mengen und Funktionen sind wie wildlebende Pandabären. Es gibt sie zwar, aber man begegnet ihnen nie, wenn man es nicht vorsätzlich und mit Anstrengung darauf anlegt `;-)`

Warum Lebesgue–Integral?

Zur Klarstellung: $\mathrm{R}\!\!\!\int$ meint das *eigentliche* Riemann– oder Regelintegral, nicht das uneigentliche. Wir stellen hier für Anwendungszwecke die Eigenschaften des Lebesgue–Integrals zusammen, konstruieren es aber nicht (dh. wir geben keinen Existenzbeweis). Das ist Gegenstand einer Vorlesung Maß– und Integrationstheorie, an der man im übrigen mehr Freude hat, wenn man das Lebesgue–Integral schon in Aktion gesehen hat.

Das Lebesgue–Integral $\int$ ist eine Verallgemeinerung des Riemann–Integrals:

Falls $\mathrm{R}\!\!\!\int_\Omega f$ existiert, dann auch $\int_\Omega f$, und die Werte sind gleich. Es gibt aber ziemlich bös unstetige Funktionen, für die $\int f$ exisitiert, aber $\mathrm{R}\!\!\!\int f$ nicht.

❓ „Wozu wollen wir so gekünstelte unschöne Funktionen überhaupt integrieren?“ — ❗ Wir wollen sie gar nicht wirklich integrieren, wir wollen sie nur davon abhalten, uns allein durch ihre Präsenz die Suppe zu versalzen. Dazu müssen wir sie zwar nicht integrieren, aber integrieren können.

Ein *lebensnahes(!)* Beispiel: Die Funktion $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2^n x)/n$ ist fü. definiert. Die Reihe konvergiert fü., aber fü. nicht absolut. Die dargestellte Funktion ist auf jedem noch so kleinen Intervall unbeschränkt, insbesondere überall unstetig. Daher ist sie nicht Riemann–integrierbar. Allerdings ist f (auf beschränkten Mengen) Lebesgue–integrierbar ($\int_0^{2\pi} f = 0$ aus Symmetriegründen), und sogar das Integral $\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx$ existiert und läßt sich leicht berechnen; es ist $\pi^3/6$. Die hier gemachten Aussagen sind nichttrivial, aber einschließlich der dazu heranzuziehenden Lemmata über Fourierreihen nicht allzu schwer zu beweisen (wenn man die Lebesgue–Theorie kennt).

Wir nennen eine Funktion f integrierbar, wenn $\int f$ definiert ist (als ein Element von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^m$). Ähnlich wie bei der bestimmten Divergenz von Reihen werden wir in gewissen Fällen für reellwertige Funktionen die Werte $\int f = \pm\infty$ zulassen; in diesen Fällen soll f aber nicht als integrierbar bezeichnet werden.

Eigenschaften des Lebesgue–Integrals

Wir unterdrücken gerne den Integrationsbereich. Man kann sich o.E. den $\mathbb{R}^n$ vorstellen. Integrale über irgendeine meßbare Teilmenge Ω sind inbegriffen wegen $\int_\Omega f = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \chi_\Omega$.

1. $\int f$ ist *nur für meßbare* Funktionen f definiert (aber nicht für alle meßbaren Funktionen). Wenn f meßbar ist und g integrierbar und $|f| \le g$, dann ist f integrierbar und $|\int f| \le \int |f| \le \int g$.

2. Wenn $\int f$ existiert, dann existiert auch $\int |f|$. [1] Die Umkehrung gilt unter der Zusatzvor-

[1] Für *uneigentliche* Riemann–Integrale gilt diese Eigenschaft nicht; aber das Lebesgue–Integral ist so allgemein,

aussetzung „f meßbar“.[2]

Wenn reellwertiges f integrierbar ist und $K \geq 0$ eine Konstante, dann sind die abgeschnittenen Funktionen $\min\{f, K\}$ und $\max\{f, -K\}$ auch integrierbar.

3. Für reellwertiges f schreiben wir $f_+ := \max\{f, 0\} \geq 0$ und $f_- := \max\{-f, 0\} \geq 0$, so daß $\int f = \int f_+ - \inf f_-$. Sollte für meßbares reellwertiges f zwar f_- integrierbar sein, aber f_+ nicht, dann setzen wir $\int f = \int f_+ := +\infty$. Im umgekehrten Fall ist $\int f = -\int f_- = -\infty$ analog definiert.

4. Für meßbare Mengen Ω ist $\int \chi_\Omega =: \mu(\Omega)$ definiert (evtl. mit Wert $+\infty$), und es ist das Lebesgue–Maß von Ω (eine verallgemeinerung des schulbekannten Volumenbegriffs). Ob das eine Definition oder eine einfache Folgerung ist, hängt davon ab, von welcher Seite man die Maß– und Integrationstheorie aufzieht.

5. Wenn $f = g$ fü., dann ist $\int f = \int g$ (beide Seiten definiert oder beide Seiten undefiniert). Wenn $f \leq g$ fü. und f, g integrierbar, dann ist $\int f \leq \int g$. Es gilt $\int \lambda f = \lambda \int f$ für Konstanten λ, sowie $\int (f+g) = \int f + \int g$ (vorausgesetzt f, g integrierbar).

6. **Lebesguescher Konvergenzsatz:** Seien f_n und g integrierbare Funktionen. Es gelte $|f_n| \leq g$ für alle n und $f_n \to f$ fü. Dann ist f integrierbar und $\int f_n \to \int f$.

   (Das ist viel allgemeiner als die Vertauschungssätze beim Riemann–Integral, insbesondere ist bequem, daß die Integrierbarkeit der Grenzfunktion f eine *Folgerung* ist und nicht vorausgesetzt werden muß.)

7. **Lemma von Fatou:** Seien $f_n \geq 0$ integrierbar und es gelte $f_n \to f$ fü. Dann ist $\liminf \int f_n \geq \int f$. (Hier ist $\int f = \infty$ erlaubt.)[3]

8. **Monotone Konvergenz:** Seien f_n integrierbar und es gelte $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \ldots \to f$ fü. Dann gilt $\int f = \lim \int f_n$. (Wieder kann $\int f = \infty$ sein.)

Räume stetiger und integrierbarer Funktionen

Räume stetiger Funktionen: *Sei Ω ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$. Mit $BC^0(\bar{\Omega})$ bzw. $BC^0(\Omega)$ bezeichnen wir den Raum aller auf $\bar{\Omega}$ bzw. Ω beschränkten und stetigen Funktionen. Entsprechend wird für C^0 statt BC^0 nur Stetigkeit, nicht aber Beschränktheit verlangt (soweit letztere nicht automatisch folgt, wie im Fall* beschränkter *Gebiete Ω, wo natürlich $BC^0(\bar{\Omega}) = C^0(\bar{\Omega})$ gilt).*

Auf den BC–Räumen verwenden wir normalerweise die Norm

$$\|f\|_{BC^0} := \|f\|_\infty := \sup\Big\{|f(x)| \;\Big|\; x \in \Omega\Big\}$$

Zusammen mit dieser Norm sind $BC^0(\Omega)$ und $BC^0(\bar{\Omega})$ Banachräume, und der von $\|\cdot\|_\infty$ gelieferte Konvergenzbegriff ist die gleichmäßige Konvergenz.

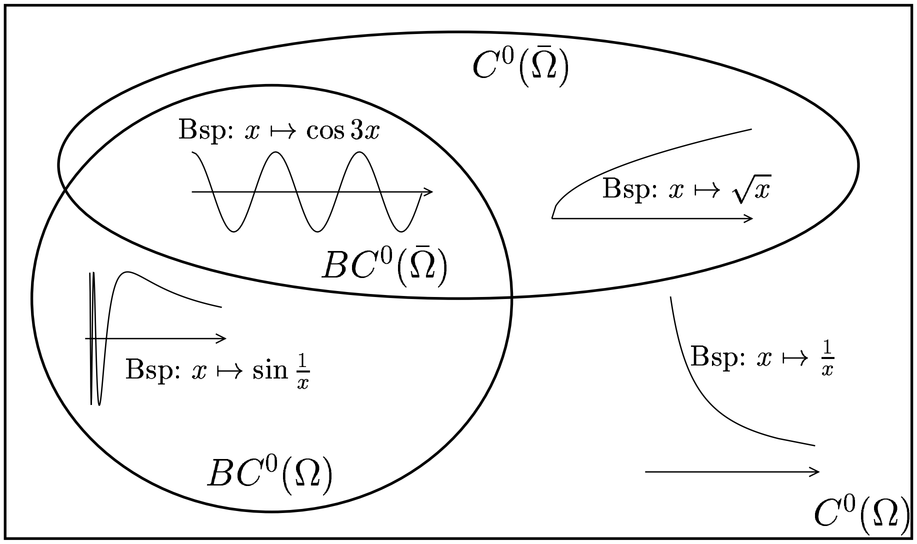
Wir können auf all diesen Räumen aber auch

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \in [0, \infty]\,, \quad (1 \leq p < \infty)$$

einführen und setzen zB. $(C^0 \cap L^p)(\Omega) := \{f \in C^0(\Omega) \mid \|f\|_{L^p} < \infty\}$. Diese Räume sind zwar normierte Vektorräume, aber sie sind nicht vollständig, also keine Banachräume; z.B. ist die durch $f_n(x) := x^{1/(2n+1)}$ gegebene Funktionenfolge in $C^0[-1,1] = (C^0 \cap L^p)[-1,1]$ eine Cauchyfolge, aber sie hat keinen Grenzwert. (Heuristisch ist der einzige Kandidat für einen Grenzwert, $f(x) := \operatorname{sign} x$, eine unstetige Funktion.) Den Nachweis der Normeigenschaft von $\|\cdot\|_{L^p}$, wiewohl nicht allzu schwierig, schenken wir uns, da er nicht Gegenstand der Variationsrechnung ist.

[2] Für $f(x) := 2\chi_E(x) - 1$ mit einer nicht meßbaren Menge E ist f nicht einmal meßbar, obwohl $|f| \equiv 1$ ist.

[3] Gegenbeispiele, daß Gleichheit nicht gelten muß: Zerfließendes Paket: $f_n(x) = n^{-1}/(1 + (x/n)^2)$ oder auch Konzentration $f_n(x) = n/(1 + (nx)^2)$ oder weglaufen $f_n(x) = 1/(1 + (x-n)^2)$, jeweils mit $f_n \to 0$ fü, aber $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \pi \not\to \int 0 = 0$.



C– und BC–Räume: die Beispiele sind für den Fall $\Omega =]0, \infty[$

Räume integrierbarer Funktionen:

Durch Vervollständigung (ähnlich wie man von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ kommt) erhält man die Räume $L^p(\Omega)$, und es kommt dabei nicht darauf an, ob man $(BC^0 \cap L^p)(\bar\Omega)$ oder $(C^0 \cap L^p)(\Omega)$ vervollständigt: daß dieser abstrakte Vervollständigungsprozeß wirklich auf *Funktionen* führt, folgt aus folgendem

Satz & Definition: *Sei (f_n) Cauchyfolge in $(C^0 \cap L^p)(\Omega)$ oder $(BC^0 \cap L^p)(\bar\Omega)$ (oder einem der Räume dazwischen). Dann gibt es eine meßbare Funktion f, für die $|f|^p$ integrierbar ist, so daß $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$. Falls $\tilde f$ eine weitere Funktion mit derselben Eigenschaft ist, gilt $f = \tilde f$ fü. Die Gesamtheit aller solchen Grenzwerte aus Cauchyfolgen ist der Raum*

$$\tilde L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ meßbar} \;\middle|\; \|f\|_{L^p} < \infty \right\}$$

Mit $\|\cdot\|_{L^p}$ wird $\tilde L^p(\Omega)$ fast ein Banachraum: nur das Axiom "$\|f\| = 0 \Longrightarrow f = 0$" ist verletzt; es gilt nur "$\|f\| = 0 \Longrightarrow f = 0$" fü.

Wenn wir Äquivalenzklassen bzgl. der Äquivalenzrelation "= fü." bilden und den Raum der Äquivalenzklassen mit L^p bezeichnen, dann wird L^p ein Banachraum. Wir bezeichnen die Elemente dieser Räume als Funktionen, obwohl es genaugenommen Klassen von Funktionen sind.

Ferner definieren wir

$$\tilde L^\infty(\Omega) := \left\{ f \text{ meßbar} \;\middle|\; \|f\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty \right\}$$
$$\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| := \inf\{ M \mid |f(x)| < M \text{ fü.} \}$$

und L^∞ analog der Raum der Äquivalenzklassen modulo "= fü". L^∞ ist ebenfalls ein Banachraum, aber im Unterschied zu L^p für $p < \infty$ entsteht er nicht durch Vervollständigung aus C^0, denn C^0 ist bereits vollständig bzgl. $\|\cdot\|_{L^\infty} = \|\cdot\|_{BC^0}$.

Wir schreiben auch

$$L^p_{\text{loc}}(\Omega) := \left\{ f \text{ meßbar} \;\middle|\; \forall x \in \Omega \; \exists \text{ Kugel } B \text{ um } x : \; f \cdot \chi_B \in L^p(\Omega \cap B) \right\}$$

Dieser Raum ist kein *normierter Raum.*

Die Literatur über Integrationstheorie ist zahlreich, und sie bietet Zugänge von verschiedenen Seiten. Z.B. wäre das Buch von Elstrodt zu empfehlen. Zum Selbststudium empfehle ich dieses Gebiet erst n a c h Kenntnis der Anwendungsbeispiele aus dieser (und möglichst weiteren) Schnelleinführungen.

Quellen für Funktionalanalysis insbesondere mit Blick auf die L^p–Räume sind das BI-Taschebuch von Hirzebruch und Scharlau (kurz) und das Buch von Riesz und Nagy. Der Name Nagy wird annähernd 'nodj' mit sehr offenem 'o' ausgesprochen.

Konvergenzbegriffe im Vergleich

Die Konvergenzbegriffe $f_n \to f$ fü., $f_n \to f$ glm. und $f_n \to f$ (L^p) kennen wir schon. Wir brauchen noch einen vierten, nämlich den der *schwachen* Konvergenz $f_n \to f$ (w-L^p), auch $f_n \rightharpoonup f$ geschrieben: *Eine Funktionenfolge f_n in L^p $(1 < p < \infty)$ heißt schwach konvergent gegen $f \in L^p$, wenn für alle $g \in L^q$ (wobei $1/q + 1/p = 1$ ist) gilt: $\int f_n g \to \int fg$.*

Sinngehalt dieser Konvergenzbegriffe:

(1) $\boxed{f_n \to f \text{ fü.}}$ Der praktischste Konvergenzbegriff, da sehr leicht nachweisbar: er bezieht sich nur auf die Konvergenz von Zahlenfolgen und ignoriert, daß es sich um Funktionenfolgen handelt. Marginalie für Mathematiker: Es gibt überhaupt keine Hausdorff–Topologie mit dem ersten Abzählbarkeitsaxiom, derart daß $f_n \to f$ fü. genau die Konvergenz in dieser Topologie wäre. Der Grund ist das Scheitern der Teilfolgen-Teilfolgen-Eigenschaft, die bei jedem topologischen (Hausdorff mit 1. Abz.-axiom) Konvergenzbegriff erfüllt ist, bei fü-Konvergenz aber nicht: Wenn jede Teilfolge von (x_n) ihrerseits eine gegen x konvergente Teilfolge hat, dann konvergiert x_n selbst gegen x.

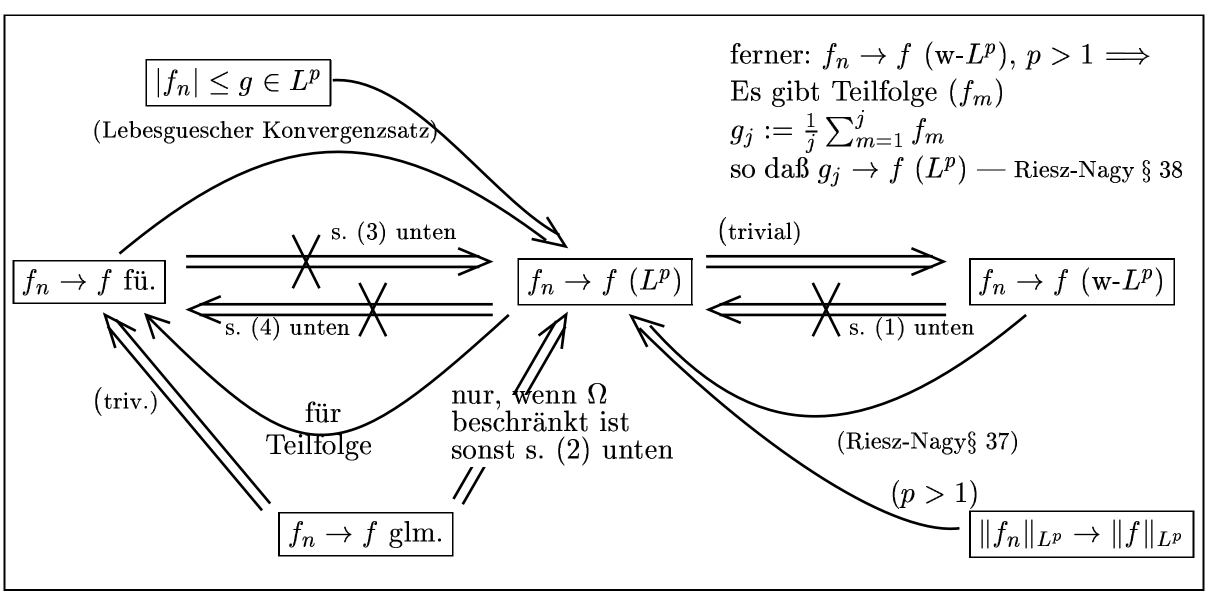
(2) $\boxed{f_n \to f \text{ glm.}}$ Ein begrifflich einfacher Konvergenzbegriff, der aber sehr auf stetige Funktionen zugeschnitten und daher oft nicht zweckmäßig ist. Schön, wenn er tut, was wir wollen.

(3) $\boxed{f_n \to f\ (L^p)}$ Im Zusammenhang mit Integralen der technisch angepaßte Konvergenzbegriff; leider ist das Wechselspiel zwischen anderen Konvergenzbegriffen ein bißchen subtil (s.u.). Insbesondere liefert L^2–Konvergenz im Zusammenhang mit Fourierreihen eine elegante und natürliche Theorie, die aber zu grob ist, um subtilere Phänomene zu fassen.

(4) $\boxed{f_n \to f\ (\text{w-}L^p)}$ Die schwache Konvergenz ist physikalisch sehr natürlich. Man soll sich g als eine Funktion vorstellen, die so aussieht und die Betrachtung einer beliebigen Funktion f mit unscharfem Auflösungsvermögen beschreibt. Schnelle Oszillationen in einer Folge f_n werden ausgemittelt, so wie auf Bildern französischer Impressionisten die einzelnen Farbpunkte aus der Distanz verschwimmen.

Ein Wechselspiel zwischen starker und schwacher Konvergenz (s.u.) ersetzt uns den Satz von Bolzano–Weierstraß, der in Funktionenräumen nicht mehr gilt. Deshalb sind direkte Methoden der Variationsrechnung ohne schwache Konvergenz nicht denkbar.

Wir werden die folgenden Implikationen in der Vorlesung nicht beweisen, aber die Aussagen als solche sollten Sie sich zu Gemüte führen



Gegenbeispiele:

(1) $\boxed{f_n \to f \ (\text{w-}L^p) \ \not\Longrightarrow f_n \to f \ (L^p)}$

$f_n(x) := \sin nx$ in $L^p[0, 2\pi]$.

(2) $\boxed{f_n \to f \text{ glm. } \not\Longrightarrow f_n \to f \ (L^p)}$ auf unbeschränkten Gebieten:

$f_n(x) := n^{-1}/(1 + (x/n)^2)$ in $L^p(\mathbb{R})$

(3) $\boxed{f_n \to f \text{ fü. } \not\Longrightarrow f_n \to f \ (L^p)}$

alle zum Satz von Fatou erwähnten Gegenbeispiele

(4) $\boxed{f_n \to f \ (L^p) \ \not\Longrightarrow f_n \to f \text{ fü.}}$

$f_n := \chi_{M_n}$ in $L^p[0, 1]$ mit den Mengen
$M_1 = [0, 1]$; $\quad M_2 = [0, \frac{1}{2}]$, $M_3 = [\frac{1}{2}, 1]$; $\quad M_4 = [0, \frac{1}{3}]$, $M_5 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $M_6 = [\frac{2}{3}, 1]$; usw.
Das ist auch ein Beispiel, daß fü.–Konvergenz die Teilfolgen–Teilfolgen–Eigenschaft verletzt.
Quelle für $f_n \to f \ (L^p) \Longrightarrow$ Teilfolge $f_{n_k} \to f$ fü.: z.B. Floret, Maß– und Integrationstheorie, 12.2.1.

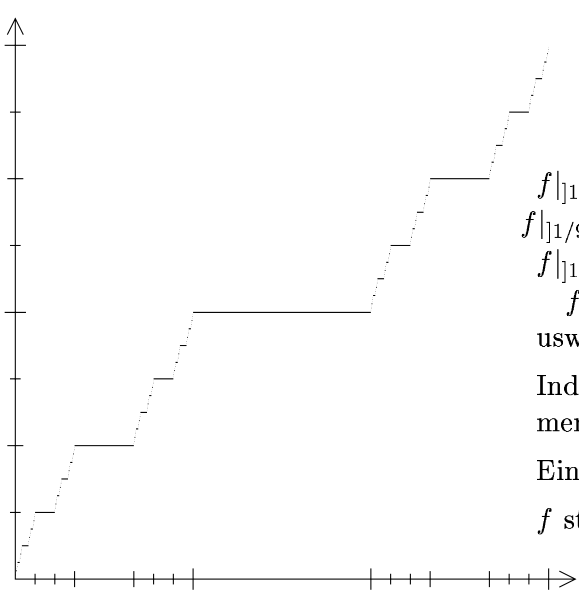
Räume differenzierbarer Funktionen (Sobolev–Räume)

Mit $C^k(\Omega)$ ($k = 1, 2, \ldots, \infty$ bezeichnen wir den Raum der in einem Gebiet Ω k-mal stetig differenzierbaren Funktionen, mit $C^\infty_{\mathrm{kp}}(\Omega)$ denjenigen der C^∞-Funktionen mit kompaktem Träger in Ω.

Wie beim Integrieren stellt sich auch beim Differenzieren die Frage nach der größtmöglichen Klasse von Funktionen, für die Differentiation sinnvoll definiert werden kann. Sicher sollten Funktionen wie $x \mapsto |x|$ in unseren Räumen differenzierbarer Funktionen liegen, wobei im geg. Beispiel die Ableitung $x \mapsto \mathrm{sign} x$ sein sollte; da eh alle uns interessierenden Funktionen unter einem Integralzeichen stehen, kann uns die Definitionslücke bei $x = 0$ ziemlich wurscht sein.

❓ Aber wie weit können wir sinnvoll gehen? — ❗ Der Begriff “fü. differenzierbar” ist sicher zu weit gefaßt, weil uns sonst der Hauptsatz der Differential–und Integralrechnung (HDI) verloren geht:

Gegenbeispiel: die Teufelstreppe (“devil’s staircase”)



$f|_{]1/3,2/3[} \equiv \frac{1}{2}$.
$f|_{]1/9,2/9[} \equiv \frac{1}{4}$, $\ f|_{]7/9,8/9[} \equiv \frac{3}{4}$;
$f|_{]1/27,2/27[} \equiv \frac{1}{8}$, $\ f|_{]7/27,8/27[} \equiv \frac{3}{8}$,
$f|_{]19/27,20/27[} \equiv \frac{5}{8}$, $\ f|_{]25/27,26/27[} \equiv \frac{7}{8}$
usw.

Induktiv definiert auf dem Komplement der Cantormenge (das ist fast überall), dort ist Ableitung $= 0$.

Eindeutig stetig fortsetzbar aufs ganze Intervall.

f stetig, $f' = 0$ fü., aber f nicht konstant.

Schwache Differenzierbarkeit: *Eine in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definierte lokalintegrierbare Funktion f heißt schwach differenzierbar, wenn es eine lokalintegrierbare Funktion $g = (g_1, \ldots, g_n)$ gibt, derart daß für alle $\varphi \in C^\infty_{\mathrm{kp}}(\Omega)$ gilt: $\int_\Omega f \partial_i \varphi = -\int_\Omega g_i \varphi$.*

Für diejenigen, die etwas über Distributionen wissen: Schwach differenzierbar sind diejenigen lokalintegrierbaren Funktionen, deren distributionelle Ableitung wieder eine lokalintegrierbare Funktion ist.

Eigenschaften der schwachen Differenzierbarkeit:
Die Definition ist *lokal*, dh. für eine beliebige (als kleine Umgebung gedachte) offene Menge $U \subset \Omega$ hängt $g|_U$ nur von $f|_U$ ab. Es gelten die üblichen Rechenregeln (wobei $'$ für irgendeine schwache partielle Ableitung steht).

- f, g schwach db. $\Longrightarrow f+g$ schwach db. und
  $(f+g)' = f' + g'$
- f schwach db., $g \in C^1 \Longrightarrow fg$ schwach db. und $(fg)' = f'g + fg'$.
  (Falls g auch nur schwach db. ist, könnte es passieren, daß $fg \notin L^1_{\text{loc}}$ ist.)
- f schwach db., $g \in C^1 \Longrightarrow f \circ g$ schwach db. und $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$.
- Für schwach db. Funktionen $f \in L^1_{\text{loc}}[a,b]$ gilt der HDI: f schwach db. $\Longrightarrow$ es ex. ein $\tilde{f}$, das fü. mit f übereinstimmt, und für dieses exisitiert die klass. Abeitung $\tilde{f}'$ fü. und stimmt mit der schwachen Ableitung überein, und es gilt $\int_a^b \tilde{f}' = f(b) - f(a)$.

  In $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gilt: Falls f schwach db. und $\nabla f \in L^p_{\text{loc}}$ mit $p > n$, dann existiert $\tilde{f} = f$ fü., so daß $\tilde{f}$ fü. klassisch differenzierbar ist und $\nabla_{\text{klass}} \tilde{f} = \nabla_{\text{schwach}} f$ fü.[4]

Ableitungen höherer Ordnung werden analog durch formale partielle Integration und Abwälzen aller partiellen Ableitungen auf die Testfunktion φ definiert. Es gilt dann der Satz über die Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge $\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f$ fü. Es folgt NICHT "schwach db. $\Longrightarrow$ fü. klassisch db.": $\partial_x \partial_y (f(x) + g(y)) = 0$ für alle lokalintegrierbaren f, g. Das ist aber kein großer Verlust, da der Begriff "fü. (klassisch) differenzierbar" in der Theorie keine Rolle spielt.

Soboleväume: *Auf $C^k(\Omega)$ kann man definieren (α: Multiindex):*

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{\alpha, |\alpha| \le k} \int_\Omega |\partial^\alpha f|^p \, dx \right)^{1/p} \in [0, \infty], \quad k \in \mathbb{N}, 1 \le p < \infty$$

Ferner sei $(C^k \cap W^{k,p})(\Omega) := \{ f \in C^1(\Omega) \mid \|f\|_{W^{k,p}} < \infty \}$. Dies ist für jedes (k,p) ein normierter Vektorraum, dessen Vervollständigung $W^{k,p}(\Omega)$ ist. Äquivalent kann man (dies ist nicht trivial) $W^{k,p}(\Omega)$ als den Raum aller lokalintegrierbaren Funkitonen f in Ω beschreiben, deren sämtliche partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k im schwachen Sinne existieren und aus $L^p(\Omega)$ sind, wobei wiederum modulo der Äquivalenzrelation "$=$ fü." zu rechnen ist.

Unter $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)$ verstehen wir den Abschluß von $C^\infty_{\text{kp}}(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$.

STANDARDWERK: ADAMS: SOBOLEV SPACES

A-priori sind Funktionen in $W^{k,p}(\Omega)$ wieder nur bis auf Nullmengen definiert, so daß es nicht sinnvoll ist, ihnen Werte auf $\partial\Omega$ zuzuordnen, da $\partial\Omega$ selbst eine Nullmenge ist. Für $k = 0$ ($W^{0,p} \equiv L^p$) ist damit auch alles gesagt; aber für $k \ge 1$ sind die $W^{k,p}$–Funktionen "besser" als a-priori zu hoffen, und für hinreichend gute Gebiete (Lipschitz–Gebiete) Ω lassen sich $W^{1,p}(\Omega)$–Funktionen in sinnvoller Weise Werte auf dem Rand zuordnen, die dann ihrerseits $L^p(\partial\Omega)$–Funktionen sind. Dies zu vertiefen ist hier nicht unser Gegenstand. Jedenfalls gibt es eine mathematisch strenge Fundierung der Aussage, daß $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ der Raum derjenigen $W^{1,p}(\Omega)$–Funktionen ist, die am Rand verschwinden.

Kompaktheitssatz: *Es sei $1 \le p < \infty$ und Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$. Sei u_j eine in $W^{1,p}(\Omega)$ beschränkte Teilfolge. Dann gibt es eine Teilfolge, die in $L^p(\Omega)$ gegen ein gewisses u konvergiert. Außer für $p = 1$ gibt es ferner eine Teilfolge, die zusätzlich noch* schwach *in $W^{1,p}(\Omega)$ gegen u konvergiert, dh. mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$: $\forall \phi \in \mathring{W}^{1,q}(\Omega) : \int u_j \phi + \int \langle \nabla u_j ; \nabla \phi \rangle \to \int u \phi + \int \langle \nabla u ; \nabla \phi \rangle$.*

Schärfer gilt sogar: Falls $p \le n$ und $p^* < np/(n-p)$, dann gibt es eine Teilfolge, die in $L^{p^*}(\Omega)$ konvergiert. Falls $p > n$, dann gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Wir werden hier nur den ersten Teil brauchen; andererseits ist die letzte Aussage noch nicht vollständig ausgereizt (Für die Teilnehmer des Seminars Sobolevräume: kompakte Einbettung in Hölder–Räume!).

Man vergleiche die Aussage mit dem (Korollar zum) Satz von Arzela–Ascoli: Eine in C^1 beschränkte Folge u_j hat eine glm. (dh. in der C^0-Norm) konvergente Teilfolge.

Ganz entscheidend lästig ist der Umstand, daß die Aussage über schwache Konvergenz nicht für $p = 1$ gilt. Für Funktionalanalytiker: das liegt daran, daß der Satz von Banach–Alaoglu dahinter steckt und L^1 nicht der Dualraum von L^∞ (sogar überhaupt niemandes Dualraum) ist. Die mit diesem Umstand verbundenen Probleme werden wir in dieser Vorlesung nicht behandeln, sondern vermeiden.