TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
Priv.Doz. Dr. Jochen Denzler

Übungen zur Variationsrechnung — Blatt 3

Sommersemester 2000

AUSGABE AM FR., 12.5.2000
BESPRECHUNG: AB 19.5.2000

10. Das Catenoid

Wir betrachten das Variationsproblem $\min I$ für

$$I[r] := 2\pi \int_{-x_1}^{x_1} r(x)\sqrt{1+r'(x)^2}\,dx\ , \quad r \in C^1([-x_1,x_1] \to \mathbb{R}^+)\ ,\ r(\pm x_1) = r_1\ ,$$

welches die Aufgabe beschreibt, eine ebene Kurve zu finden, die, rotiert um die x–Achse, die/eine Rotationsfläche mit dem kleinsten Flächeninhalt liefert. Geben Sie *direkt* die Eulergleichung an, ferner mit unabhängiger Rechnung die Differentialgleichung erster Ordnung, die in der Vorlesung vorausgreifend als Energiesatz bezeichnet wurde. Zeigen Sie, daß die allgemeine Lösung der Eulerleichung die Form

$$r(x) = E\cosh\frac{x-x_0}{E} \tag{1}$$

mit Konstanten $E > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ hat.

Wegen der Randbedingung $r(-x_1) = r(x_1)$ können wir uns jetzt auf den Fall $x_0 = 0$ beschränken.

Zeigen Sie, daß es genau eine Zahl $\zeta > 0$ gibt, die die Gleichung $\zeta = \coth\zeta$ löst, geben Sie ihren numerischen Wert an, und beweisen Sie, daß es keine / genau eine / genau zwei Extremalen zu den Randbedingungen $r(\pm x_1) = r_1$ gibt, wenn r_1/x_1 kleiner / gleich /größer als $\rho := \sinh\zeta$ ist. — BESPRECHUNG AM FR., 19.5.2000

11. Das Catenoid, Teil 2

Wir haben gesehen, daß es für r_1/x_1 hireichend klein *keine* C^1–Kurven gibt, die den Flächeninhalt der Rotationsfläche minimieren. Im Fall $r_1/x_1 < \rho$ der vorigen Aufgabe, welche der beiden Extremalen zu den gegebenen Randbedingungen sollen wir als Spitzenkandidaten für ein Minimum auswählen? Diese Frage ist Gegenstand der vorliegenden Aufgabe.

Zeigen Sie, daß (mit $u := x_1/E$, $s := r_1/x_1$) für die Fläche des Catenoids gilt:

$$A := \frac{I[r(\cdot,E)]}{2\pi r_1^2} = \frac{u}{\cosh^2 u} + \tanh u$$

wobei $s = \cosh u/u$ ist. Ferner, daß dies zwei streng monoton fallende Funktionen $s \mapsto A_\pm(s)$ definiert, wobei

$$\begin{aligned}
&A_+ : [\rho,\infty[\to]1,\zeta]\ , \quad A_+(\rho) = \zeta\ ,\ A_+(s) \to 1 \text{ für } s \to \infty \\
&A_- : [\rho,\infty[\to]0,\zeta]\ , \quad A_-(\rho) = \zeta\ ,\ A_-(s) \sim 2/s \text{ für } s \to \infty \\
&A_+'(s) > A_-'(s) \text{ für } s > \rho \text{ und somit } A_+(s) > A_-(s)
\end{aligned}$$

und A_+ zum kleineren Wert von E gehört. (Betrachten Sie dazu die Graphen von $A_\pm$ als nach u parametrisiert.) Es hat also stets der kleinere Wert von E keine Chance, ein absolutes Minimum zu liefern. (Wir werden später sehen, daß er nicht einmal ein relatives Minimum liefert.)

Es gibt noch eine weitere interessante Kurve, die eine sinnvolle Rotationsfläche liefert, aber nicht im ursprünglichen Definitionsbereich von I liegt: der Streckenzug $(-x_1, r_1) \dots (-x_1, 0) \dots (x_1, 0) \dots (x_1, r_1)$, auch als Goldschmidt–Lösung bekannt. Sein zugehöriges Flächenfunktional, ebenso normiert wie bei $A_\pm$, sei $A_\sqcup$. Zeichnen Sie Graphen aller drei Funktionen A_+, A_-, $A_\sqcup$, und dazu für einige repräsentative Werte von s die zugehörigen Kurven in der (x, r)–Ebene.

— Besprechung am Fr 19.5.2000

12. Absolute Minimale sagen nie „Auf Wiedersehen"

Seien $\bar{y} : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $\tilde{y} : [a, b] \to \mathbb{R}$ absolute Minimale eines Variationsproblems $I[y] := \int_a^b L(t, y, \dot{y})\, dt$ (zu unterschiedlichen Randbedingungen). Wir setzen $L_{\dot{y}\dot{y}} > 0$ voraus. Man zeige, daß es nicht zwei Punkte $t_0, t_1 \in [a, b[$ geben kann, in denen sich $\bar{y}$ und $\tilde{y}$ schneiden. *Hinweis: Unter der gegenteiligen Annahme kann man Minimale mit Ecken konstruieren.*
— Besprechung ab Fr 19.5.2000

13. Das Catenoid, Teil 3

Zuerst eine ausführliche Motivation: Es ergibt sich aus den bisherigen Catenoid–Aufgaben folgendes Bild: Für $s = r_1/x_1$ sehr klein, genauer $s < \rho$, kann keine Kurve, die Graph einer C^1–Funktion $x \mapsto r(x)$ ist, Minimum selbst im schwächstmöglichen Sinn sein. Kandidat für ein Minimum in einer größeren Klasse ist allerdings die Goldschmidt–Lösung $r_\sqcup$, die die einspannenden Kreislinien separat ausfüllt, sie aber nicht verbindet, da sie zu weit voneinander entfernt sind. Wenn die einspannenden Kreislinien näher aneinanderrücken, $s > \rho$, entstehen zwei Kurven, von denen die tiefer hängende r_+ zumindest kein absolutes Minimum ist, da sie eine größere Fläche liefert als die höher hängende r_-, die eines sein könnte.

Wir vermuten daher, daß $r_\sqcup$ und r_- jeweils relative (starke) Minima sind, r_+ aber ein Sattelpunkt. Das Szenario, daß bei Änderung eines Parameters s neue relative Minima zugleich mit anderen kritischen Punkten entstehen, ist schon aus dem $\mathbb{R}^2$ bekannt. Beispiel: Auf $[0, \infty[\times \mathbb{R}$ hat $I(x, y) := x + \frac{1}{3}x^3 - sx^2 + y^2$ für $s < 1$ nur das Rand-Minimum $x_\sqcup = 0, y = 0$, für $s > 1$ noch ein weiteres relatives Minimum $x_- = s + \sqrt{s^2 - 1}, y = 0$, dazwischen den Sattelpunkt $x_+ = s - \sqrt{s^2 - 1}, y = 0$. Bei $s = 1$, wo beide entstehen, ist die zweite Ableitung $\partial_x^2 I(x, y) = 0$, und eine Skizze zeigt, daß diese letztgenannte Eigenschaft wesentlich für das Phänomen ist.

Deshalb hoffen wir, im Catenoid–Problem für $s = \rho$ eine Richtung ϕ im Funktionenraum zu finden, in die die zweite Ableitung bei $r_+ = r_-$ verschwindet, und daraus für $s > \rho$ (zumindest in einer kleinen Umgebung von ρ) eine ähnliche Richtung ϕ, in die die zweite Ableitung bei r_+ negativ wird. Das zeigt dann, daß r_+ kein Minimum ist. (Daß r_- wirklich ein starkes Minimum ist, damit müssen wir uns noch eine Weile gedulden.)

Für festes $\phi \in C_0^1[-x_*, x_*]$, welches wir als durch 0 zu einer stückweise–C^1–Funktion auf dem Intervall $[-x_1, x_1] \supset [-x_*, x_*]$ fortgesetzt betrachten, zeige man, daß die zweite Ableitung durch

$$\left(\frac{d^2}{d\varepsilon^2}\right)\bigg|_{\varepsilon=0} I[r(\cdot, E) + \varepsilon\phi] = 2\pi \int_{-x_*}^{x_*} \left(E\phi'(x)^2 - \frac{1}{E}\phi(x)^2\right) \cosh^{-2} \frac{x}{E}\, dx \tag{2}$$

gegeben ist. Wir wollen jetzt versuchen, unter Verwendung von Termen, die schon in (2) vorkommen, einen einfachen Ausdruck $\phi(x)$ zu erraten, der (erst) bei $x = \zeta E$ verschwindet (wobei ζ wie in Aufgabe 10 die Lösung von $\zeta \sinh \zeta = \cosh \zeta$ ist). Ein solches ϕ beginnt erst bei $s = \rho$, eine legitime Variation zu werden, während es für $s < \rho$ nicht zwischen die Randbedingungen hineinpaßt, und wir hoffen daher, daß für dieses ϕ der Ausdruck (2) verschwinden könnte. Im Erfolgsfalle versuchen wir eine leichte Modifikation der Formel, die dann erst für $s > \rho$ eine legitime Variation liefern sollte, und schauen nach, ob wir dann den Ausdruck (2) auch negativ bekommen. Beide Versuche gelingen bei geschickter, aber naheliegender, Wahl von ϕ.
— Bitte bis Glg. (2) zum Mi, 24.5. vorbereiten;
den Rest diskutieren wir dann gemeinsam.